

Prawo Gaussa

Jerzy Kuczyński

Gdy byłem licealistą, przeczytałem bardzo rozsądne zdanie na temat matematyki w nauczaniu elementarnej, choć akademickiej, fizyki. Otóż autor jednego z wówczas popularnych podręczników stwierdzał, że w celu sprawnego poznawania fizyki na tym poziomie student musi znać sens i niektóre podstawowe własności całek i pochodnych, ale nie jest mu potrzebna znajomość rachunku różniczkowego i całkowego. Inaczej mówiąc można nauczyć dość zaawansowanej fizyki, wraz z rozwiązywaniem większości spotykanych na poziomie inżynierskim problemów, bez znajomości standardowej analizy matematycznej.

Biorąc pod uwagę, że pominięcie tej dziedziny matematyki stanowi znaczne ułatwienie nauki, prawdopodobnie również w szkole dałoby się przedstawiać uczniom znacznie bardziej zaawansowaną fizykę od tej, która jest nauczana współcześnie. Byłaby to fizyka ciekawsza, praktycznie użyteczna a jednocześnie chyba łatwiejsza intelektualnie od tego czego uczymy obecnie. Jedyną dodatkową inwestycją byłoby wyjaśnienie sensu całki i pochodnej co nie powinno zająć więcej niż kilkanaście minut. Jeżeli jeszcze z pochodną mogłoby być trochę problemów to całka jest zupełnie oczywista, bo to po prostu suma i ma niemal wszystkie własności sum skończonych¹.

W przypadku funkcji to pole pod wykresem a w praktyce fizycznej $\int dm$ „po krześle” to masa krzesła, $\int ds$ po powierzchni przedmiotu to pole powierzchni tego przedmiotu a $\int dV$ po bryle to objętość tej bryły. Zrozumienie tego nie stanowi problemu nawet dla ucznia szkoły podstawowej. Z pochodną jest niewiele gorzej a znaczna część wiedzy jest już realizowana pod nazwą „nauka o prędkości” i wydaje się, że użycie terminu „pochodna” za wiele niczego by nie skomplikowało.

Biorąc pod uwagę niezwykłą prostotę rachunków różniczkowych² można by tego (gdyby się chciało!) bez problemu nauczyć. Inna rzecz, że zastosowanie pochodnej w elementarnej fizyce nie jest zbyt duże. Natomiast przy użyciu pojęcia całki da się przedstawić dużo ciekawej a obecnie słabo znanej fizyki. Do tego da się to zrobić dużo szerzej, bardziej jednolicie i z mniejszym nakładem wysiłku od tego co mamy teraz. Konkretnie mam na myśli wykorzystanie prawa Gaussa.

Prawo Gaussa mówi, że całka po zamkniętej powierzchni ni ze „strumienia” pola jest równa całkowitej wydajności źródeł tego strumienia znajdujących się wewnątrz powierzchni. Jeżeli przyjąć, że strumień pola to po prostu ilość linii sił wytwarzanych przez źródła a linie „wychodzą” i „kończą się” zawsze w jakimś źródle to dalsze tłumaczenie

nie jest już potrzebne. A źródłami pola może być wiele rzeczy. Oczywiście „klasyczne” to masa i ładunek elektryczny. Ale prawo stosuje się całkiem nieźle do hałasu, fal sztormowych na oceanie czy ciepła z grzejnika. Dodatkowo prawo wiąże zachowanie pola z rodzajem przestrzeni. Zauważmy, „polem” nie musi być znane z podstawowej fizyki pole a mogą to być liczne znane z codzienności całkiem zwyczajne wielkości fizyczne. Dodatkowo przy pomocy prawa Gaussa można badać nie tylko „pola” ale również przestrzenie, w których te pola się rozchodzą. Samo prawo ma postać

$$\oint P \cdot ds = \rho \quad (1)$$

gdzie P „polem”, ds elementem zamkniętej powierzchni, po której się całkuje (sumuje) a ρ wydajnością źródeł pola wewnątrz powierzchni.

Chwilę uwagi trzeba poświęcić wielkości A . Całka jak każda suma nie zmienia jednostek. Tym samym wielkość $\oint P \cdot ds$ ma wymiar „pole razy powierzchnia” a po prawej stronie znaku równości jest źródło pola, czyli zdecydowanie inna wielkość niż pole. Tym samym, aby mogła nastąpić równość trzeba uzgodnić jednostki a dodatkowo w zależności od tego jakie jednostki wybierze my, potrzebny jest współczynnik ilościowy. I właśnie te funkcje pełni parametr A .

W przypadku elektryczności i układu SI parametr nazywa się ϵ_0 i jak wiemy wynosi $8,854187818 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$ (już sama wartość współczynnika może zniechęcić do SI!). Mając równanie (1) i ϵ_0 zupełnie elementarnie znajdujemy prawo oddziaływania ładunków, czyli prawo Coulomba³. Dodatkowo zrozumiemy skąd się to prawo wzięło! W tym celu umieszczamy ładunek q w środku sfery o promieniu „ r ”. Wiedząc, że linie sił kończą się jedynie w ładunku niezależnie od wielkości „ r ” przez powierzchnię sfery przechodzi tyle samo tych linii a ze względu na to, że wszystkie punkty sfery są tak samo odległe od ładunku (żaden punkt sfery nie jest wyróżniony) wartość pola E (natężenie pola) jest w każdym punkcie taka sama⁴. Możemy więc napisać równanie słuszne dla dowolnego r (sfery o dowolnym promieniu)

$$\epsilon_0 \oint E \cdot ds = \epsilon_0 E \cdot \oint ds = \epsilon_0 \cdot E \cdot 4\pi \epsilon_0 \cdot r^2 = Q$$

Stała, jak w przypadku każdej sumy można wyłączyć przed całkę a $\oint ds = 4\pi \cdot r^2$, bo ta całka to pole sfery. Stąd natężenie pola elektrycznego $E(r) = Q / (4\pi \epsilon_0 \cdot r^2)$. Biorąc pod uwagę, że siła $F = E \cdot q$ możemy napisać prawo Coulomba

$$F(r) = E \cdot q = q \cdot Q / (4\pi \epsilon_0 r^2)$$

Jak widać żadne całkowanie nie było potrzebne – wystarczyło jedynie znać wzór na pole sfery⁵.

¹ Oczywiście całka oznaczona. Całka nieoznaczona wydaje mi się w ogóle mało przydatnym pojęciem. Przynajmniej na poziomie elementarnej fizyki.

² W praktyce potrzebny byłby tylko jeden wzór $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$. Dla „szczególnie zainteresowanych” uzupełniony wzorami na pochodną iloczynu, ilorazu i złożenia funkcji. Ten ostatni wzór wydaje mi się warty do wprowadzenia w szkole do szacowania błędów pomiaru. Dzięki niemu da się wyjaśnić, dlaczego pewne wielkości mają większy a inne mniejszy wpływ na całkowitą niepewność pomiaru, co wydaje mi się mieć duże „ideologiczne” znaczenie w kształceniu na bardziej zaawansowanym poziomie.

³ Dla elektrostatyki pełny opis problemu można znaleźć w popularnych podręcznikach. Np. w książce D. Hallidaya a R. Resnicka.

⁴ Można trochę skomplikować problem podając, że „ $\cdot$ ” oznacza iloczyn skalarny wektorów P i ds .

⁵ Prawdziwe rachunki całkowe potrzebne są dopiero by uzyskać wzory na pole czy objętość kuli.

W identyczny sposób uzyskamy prawo grawitacji Newtona. W tym celu zamiast q i Q podstawimy masy m i M . Chwilowo zostawimy współczynnik A i wykonując te same co poprzednio operacje, czyli umieszczając masę M w środku sfery o promieniu r i zauważając, że jak poprzednio ilość „linii sił” przechodzących przez sferę nie zależy od jej promienia a siła działająca na masę jest równa iloczynowi przyspieszenia grawitacyjnego (pełniącemu tu rolę „natężenia tego pola”) i masy m , na którą to przyspieszenie działa otrzymujemy wzór

$$F(r) = m \cdot M / (4\pi A r^2) \quad (2)$$

Oczywiście standardowa postać prawa grawitacji wygląda tak

$$F(r) = G \cdot m \cdot M / (r^2) \quad (2)$$

ale przez porównanie tych równań bez trudu wyliczymy, że A dla grawitacji wynosi

$$A = 1/4\pi G \text{ lub } G = 1/4\pi A.$$

W ten sposób mamy wyprowadzone dwa z podstawowych wzorów fizyki. Ponieważ udało się powiązać te prawa z przestrzenią możemy zobaczyć co by się działo w przestrzeniach o innym wymiarze. Najmniej przekonujący jest problem dwu wymiarów. W elektryczności dwa wymiary symulujemy trochę sztucznie biorąc nieskończenie długą naładowaną prostą. Łatwo zauważyć, że linie sił pochodzące od takiej prostej są do niej prostopadłe. Wybierając do całkowania powierzchnię walca, przez którego środki podstaw przechodzi wspomniana prosta, łatwo zauważyć, że przez „denka” nie przejdzie żadna linia sił, bo denka są prostopadłe do prostej wytwarzającej pole, a wszystkie natężenia pola na poboczniczy walca są równe. Stąd całka (1) wyniesie

$$\epsilon_0 \int E \cdot ds = \epsilon_0 E \cdot \int ds = \epsilon_0 \cdot E \cdot 2\pi \epsilon_0 \cdot r \cdot h = \sigma \cdot h$$

gdzie σ to gęstość liniowa ładunku na prostej a h jest wysokością walca. Ostatecznie zależność pola od odległości od naładowanej prostej opisuje wzór

$$E = \sigma / (2\pi \epsilon_0 r)$$

Jak widać współczynnik przy π wynosi teraz dwa, ale co istotniejsze wykładnik promienia wynosi tylko jeden – pole w płaszczyźnie maleje wolniej niż w przestrzeni. To dlatego, że długość okręgu jest proporcjonalna do promienia a powierzchnia kuli do jego kwadratu.

Jest jasne, że biorąc masywny nieskończenie długi walec otrzymamy zachowanie „dwuwymiarowej grawitacji”. Dwuwymiarowe pole ma stosunkowo niewiele praktycznych zastosowań. Tak naprawdę jedyne, które mi przychodzi do głowy to opis fali rozchodzącej się od dość odle-

głego sztormu (będącego źródłem fal). Otóż w odległości wyraźnie większej od rozmiarów obszaru sztormowego, energia takiej fali (zwanej martwą) maleje odwrotnie proporcjonalnie do odległości od tego sztormu. W praktyce oznacza to, że taka fala maleje dość wolno i możemy ją dość często napotkać⁶.

Bardzo często stykamy się z polem w jednym wymiarze. Tym razem modelem tej sytuacji jest nieskończenie naładowana płaszczyzna o gęstości powierzchniowej ładunku η . Oczywiście i w tym przypadku linie sił są prostopadłe do takiej płaszczyzny. Jeżeli na taką płaszczyznę nałożymy walec o osi prostopadłej do tej płaszczyzny to tym razem przez pobocznice nie przejdzie żadna linia. Dlatego całka ograniczy do sumy powierzchni S podstaw

$$\epsilon_0 \int E \cdot ds = \epsilon_0 E \cdot \int ds = \epsilon_0 \cdot E \cdot 2S = \eta \cdot S \implies E = \eta / 2\epsilon_0$$

Zauważmy, jednowymiarowe pole w ogóle nie maleje z odległością. Można to zademonstrować eksperymentalnie budując „telefon ze sznurka”. Jeżeli połączyć sznurkiem dwa pudełka (np. po paście do butów) to mówiąc do jednego z nich odległy nawet o kilkadziesiąt metrów słuchacz wcale nieźle słyszy głos w drugim pudełku. bo dźwięk „wpuszczony” do sznurka nie rozprasza się. Oczywiście klasycznym przykładem jednowymiarowego pola jest grawitacja przy powierzchni Ziemi. Blisko powierzchni można uznać, że ta powierzchnia jest w przybliżeniu płaska i nieskończona. Dlatego przyspieszenie ziemskie przy powierzchni jest stałe a dopiero gdy ujawnia się kulistość Ziemi pole jest opisane wzorami (2).

Jednym z ciekawszych zastosowań wzoru na pole nieskończonej płaszczyzny jest próba obliczenia własności orbity Słońca w Galaktyce. Mleczna Droga jest płaska (grubość do średnicy są zbliżone stosunków jakie reprezentuje płyta CD). Dlatego w funkcji wysokości nad płaszczyznę Galaktyki pole grawitacyjne jest z grubsza stałe. Znając masę galaktyki można policzyć „średnią gęstość powierzchniową”⁷ i traktując ruch w wysokości jak rzut ukośny i znając wektor prędkości Słońca (składowe pionową i poziomą) można wyliczyć okres między kolejnymi przejściami Słońca przez płaszczyznę Galaktyki.

Podsumowując - przy niewielkiej „inwestycji intelektualnej” udało się przedstawić stosunkowo duży i interesujący obszar fizyki. Rozwijając te rozważanie nietrudno wyjaśnić jak można by ujawnić „dodatkowe siły” przyrody (np. tzw. piątą siłę), jak przedstawić siły o skończonym zasięgu (np. oddziaływanie silne) czy uzasadnić, dlaczego Wszechświat jako całość ma zerowy ładunek elektryczny. Możliwości są olbrzymie i raczej jest problem z powstrzymaniem się z nadmiernym rozwijaniem tej tematyki⁸.

Jerzy Kuciński
Akademia Śląska

⁶ W. Dremljug w „Oceanografia nautyczna” podaje, że na Północnym Atlantyku, gdy prędkość wiatru jest dwukrotnie mniejsza od prędkości fal, martwe fale stanowią około 95 % wszystkich fal. Za martwą uważamy falę, która powstała w wyniku innego wiatru od obecnie wiejącego (odległego lub po prostu tego, który się już skończył). Można dodać, że martwiak to jedno z najbardziej nieprzyjemnych zjawisk na morzu.

⁷ Trzeba by wyliczyć „gęstość powierzchniową” galaktyki w pobliżu Słońca. W ogóle zadanie nie jest proste i realne rachunki wymagają trochę umiejętności, ale jest b. ciekawe. M.in. jego rozwiązanie miałoby tłumaczyć okresowe zjawiska na Ziemi gdy Słońce przechodzi przez płaszczyznę Galaktyki, Ziemia może podlegać np. zlodowaceniom.

⁸ Bardzo interesującym z praktycznego punktu widzenia jest omówienie rozchodzenia się światła we Wszechświecie w tym mierzenie odległości i jasności obiektów. De facto od tego należałoby rozpocząć zapoznanie uczniów z prawem Gaussa. Też chciałem od tego zacząć, ale ... temat jest na tyle obszerny, że rozsądziłby ramy tekstu.